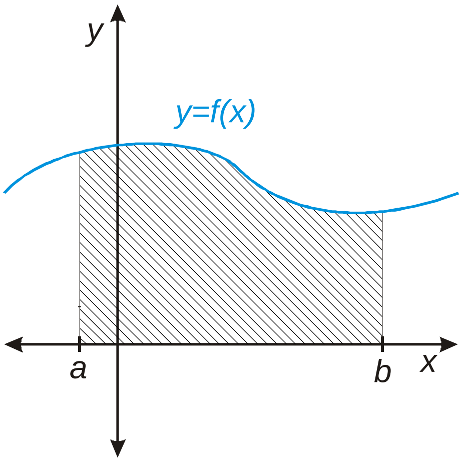
10.3.13 Výpočet plochy obrazce I

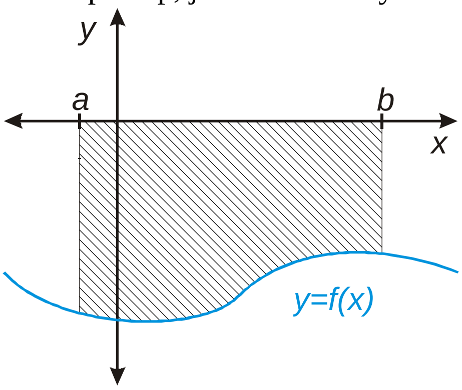
Předpoklady: 10311

Nejjednodušší případ už známe z hodiny, ve které jsme odvozovali určitý integrál:

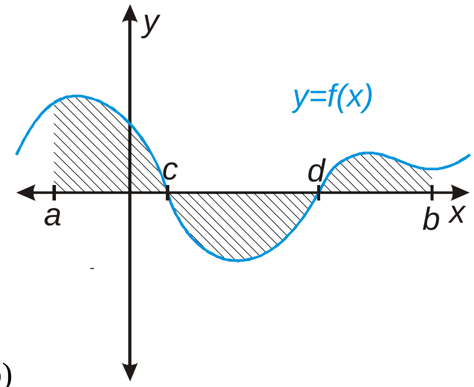


Útvar $U(a,b,f)$ = plocha vymezená přímkami $y=0$ (osa x), $x=a$, $x=b$ a grafem spojité, nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle \Rightarrow S(U)=\int_a^b f(x)$.

Př. 1: Navrhni postup, jak určit obsahy obrazců na dalších obrázcích:



a)



b)

a) Na levém obrázku je nakreslena funkce, která je v intervalu $\langle a;b\rangle$ záporná $\Rightarrow$ záporný vyjde i určitý integrál $\Rightarrow$ musíme znaménko změnit na kladné: $S(U)=-\int_a^b f(x)\,dx$

b) Na pravém obrázku je funkce, která několikrát mění své znaménko $\Rightarrow$ jednotlivé části plochy by se od sebe odečítaly $\Rightarrow$ musíme výpočet rozdělit do intervalů, ve kterých má funkce stále stejné znaménko a podle potřeby před integrály přidat mínus, aby všechny části vycházely kladně: $S(U)=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ **při výpočtu plochy musíme mít představu o znaménkách hodnot funkce.**

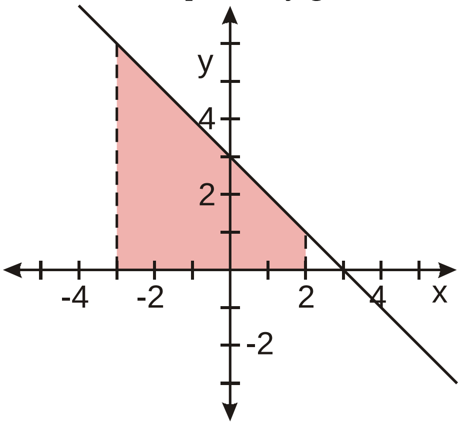
Př. 2: Vypočti obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:
a) $y=3-x, y=0, x=-3, x=2$

b) $y = x^2 - x - 12$, $y = 0$

c) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$

a) $y = 3 - x, y = 0, x = -3, x = 2$

Nakreslíme si přibližný graf funkce:



$\Rightarrow$ spočteme klasický určitý integrál $S(U) = \int_a^b f(x)\,dx$

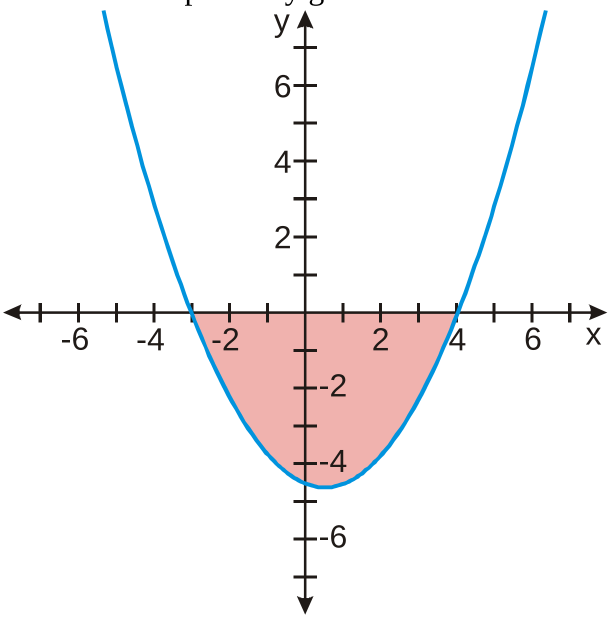
$$S(U) = \int_{-3}^{2} (3 - x)\,dx = [3x]_{-3}^{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2} = [3 \cdot 2 - 3(-3)] - \left[\frac{2^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2}\right] = 15 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{2}$$

b) $y = x^2 - x - 12$, $y = 0$

Najdeme průsečíky s osou x: $y = x^2 - x - 12 = 0$

$(x - 4)(x + 3) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = 4$.

Nakreslíme si přibližný graf funkce:



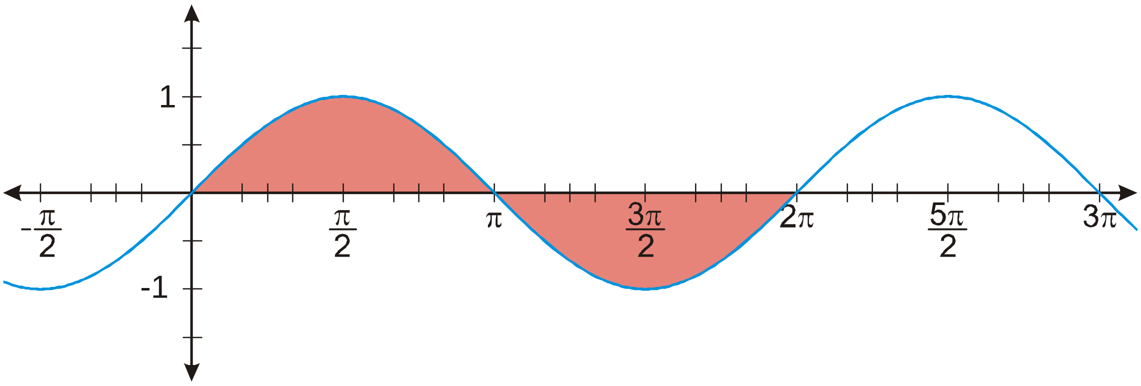
$\Rightarrow$ spočteme určitý integrál se záporným znaménkem: $S(U) = -\int_a^b f(x)\,dx$

$$S(U) = -\int_{-3}^{4}(x^2 - x - 12)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{4} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{4} + [12x]_{-3}^{4} =$$

$$= -\left[\frac{4^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right] + \left[\frac{4^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2}\right] + [12\cdot 4 - 12\cdot(-3)] = -\left(\frac{64}{3} + 9\right) + \left(8 - \frac{9}{2}\right) + 84 = \frac{343}{6}$$

c) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$

Nakreslíme graf funkce:



Útvar se skládá ze dvou stejných částí $\Rightarrow$ určíme obsah jedné poloviny a vynásobíme ho dvěma.

$$S(U) = 2\int_{0}^{\pi} \sin dx = 2[-\cos x]_{0}^{\pi} = -2[\cos\pi - \cos 0] = -2(-1-1) = 4$$

Poznámka: Graf funkce v bodě b) je ve skutečnosti podstatně štíhlejší, v naší situaci je jeho tvar ale zcela nepodstatný, záleží pouze na tom, která jeho část se nachází pod osou.

Př. 3: Petáková:
strana 165/cvičení 100 c) e)
strana 166/cvičení 101 b)

Shrnutí: Při výpočtu ploch je často nutné obrazec rozdělit na části.